

Logaritmos: propriedades dos logaritmos

Objetivo

Aprender as propriedades dos logaritmos para resolver os exercícios propostos.

Se liga

Para essa aula é importante saber sobre potenciação e logaritmo.

Curiosidade

O logaritmo foi criado para facilitar cálculos com números muito grandes, já que antigamente não tinha calculadora. A ferramenta chave para o uso do logaritmo antes da calculadora e do computador foi a tabela de logaritmos.

Teoria

Temos algumas propriedades que serão fundamentais na resolução de problemas que envolvem logaritmos. Dá só uma olhada!

Propriedades:

I. $\log_b (p \times q) = \log_b p + \log_b q$

II. $\log_b (p \div q) = \log_b p - \log_b q$

Ex: Considerando $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$, determine:

a) $\log 6$

b) $\log 5$

Solução:

a) $\log 6 = \log (2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0,3 + 0,48 = 0,78$

b) $\log 5 = \log (10 \div 2) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3 = 0,7$

III. $\log_b a^\beta = \beta \cdot \log_b a$

IV. $\log_{b^\beta} a = \frac{1}{\beta} \cdot \log_b a$

Ex: $\log_{27} 81 = \log_{3^3} 3^4 = \frac{4}{3} \cdot \log_3 3 = \frac{4}{3}$

V. Mudança de base: $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

Cuidado! O número C é o número que você quiser.

VI. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

VII. $\log_b b^a$

Pronto! Com essas propriedades você consegue fazer todos os exercícios

Exercícios de fixação

1. Dado $\log 2 = 0,3$, resolva $\log 20$
 - a) 1,3
 - b) 0,7
 - c) 0,5

2. Considere $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$, então $\log 12$ é:
 - a) 1,3
 - b) 1,08
 - c) 2

3. O resultado $\log_{2^3} x^3$
 - a) x
 - b) $\log_2 x^3$
 - c) $\log_2 x$

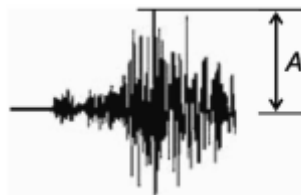
4. Faça a mudança para a base 10 em $\log_2 5$

5. Dado $\log_2 x + \log_2 y = 7$, então $x \cdot y$ é:
 - a) 128
 - b) 32
 - c) 64

Exercícios de vestibulares



1. Um método para se estimar a ordem de grandeza de um número positivo N é usar uma pequena variação do conceito de notação científica. O método consiste em determinar o valor x que satisfaz a equação $10^x = N$ e usar propriedades dos logaritmos para saber o número de casas decimais desse número. Dados $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,47$ use esse método para decidir qual dos números abaixo mais se aproxima de $N = 2^{120} 3^{30}$
- a) 10^{45}
 - b) 10^{50}
 - c) 10^{55}
 - d) 10^{60}
 - e) 10^{65}
2. Quando ocorre um terremoto, o sismógrafo registra o tremor de terra em um gráfico como o apresentado a seguir.



A altura máxima A , que aparece no desenho é chamada de amplitude da onda sísmica e é medida em milímetros. A magnitude do terremoto a uma distância de 200 km do local onde ele ocorreu é um número calculado por

$$m = \log 10 + 2,5$$

Notícia No dia 13 de agosto de 2011 foi registrado na costa sudeste do México, um terremoto com epicentro a cerca de 200 km de Salinas Cruz, onde o sismógrafo mostrou ondas de amplitude máxima de 160 mm.

(Serviço Sismológico Nacional, Brasília).

Usando $\log 2 = 0,3$, a magnitude desse terremoto foi de:

- a) 4,6
- b) 5,0
- c) 5,4
- d) 5,7
- e) 6,1

3. A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (r). Ela é dada por $f = \frac{A}{r^B}$. O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, $r = 1$ para a palavra mais frequente, $r = 2$ para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente, A e B são constantes positivas.

Disponível em: <http://klein.sbm.org.br>. Acesso em: 12 ago. 2020 (adaptado).

Com base nos valores de $X = \log(r)$ e $Y = \log(f)$, é possível estimar valores para A e B . No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é

a) $Y = \log(A) - B \cdot X$

b) $Y = \frac{\log(A)}{X + \log(B)}$

c) $Y = \frac{\log(A)}{B} - X$

d) $Y = \frac{\log(A)}{B \cdot X}$

e) $Y = \frac{\log(A)}{X^B}$

4. Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.

Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100 000 transistores distribuídos em 0,25 cm² de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponível em: www.pocket-lint.com. Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

- a) 1999
- b) 2002
- c) 2022
- d) 2026
- e) 2146



5. Considerando $\log_7 2 = w$, temos que o valor de $\log_4 14$ pode ser expresso por

- a) $\frac{2}{w+1}$
- b) $\frac{2w}{w+1}$
- c) $\frac{3w}{2}$
- d) $\frac{2}{w}$
- e) $\frac{w+1}{2w}$

6. Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_0 , correspondente a dez vezes o nível inicial. Leia as informações a seguir.

- A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias.
- O nível de toxidez $T(x)$, após x dias do acidente, pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$T(x) = T_0(0,5)^{0,1x}$$

Considere D o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial.

Sendo $\log 2 = 0,3$, o valor de D é igual a:

- a) 30
- b) 32
- c) 34
- d) 36
- e) 40

7. Para melhor estudar o Sol, os astrônomos utilizam filtros de luz em seus instrumentos de observação.

Admita um filtro que deixe passar $\frac{4}{5}$ da intensidade da luz que nele incide. Para reduzir essa intensidade a menos de 10% da original, foi necessário utilizar n filtros.

Considerando $\log 2 = 0,301$, o menor valor de n é igual a:

- a) 9
- b) 10
- c) 11
- d) 12
- e) 14

8. Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 , uma constante real positiva. Considere que E_1 , e E_2 , representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Qual é a relação entre E_1 , e E_2 ?

- a) $E_1 = E_2 + 2$
 - b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$
 - c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$
 - d) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$
 - e) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$
9. Pedro estudava para uma prova de Matemática, quando se deparou com a seguinte questão:

“Se $\log_c a = 10$ e $\log_c b = 2$, então quanto vale $\log_b a^\pi$?”

Ele a resolveu da seguinte forma:

Passo	Expressão
0	$\log_b a^\pi$
1	$\pi \cdot \log_b a$
2	$\pi \cdot \frac{\log_c a}{\log_c b}$
3	$\pi \cdot (\log_c a - \log_c b)$
4	$\pi \cdot (10 - 2) = 8\pi$

Em sua resposta, Pedro

- a) acertou completamente a questão.
- b) errou a questão entre os passos 0 e 1.
- c) errou a questão entre os passos 1 e 2.
- d) errou a questão entre os passos 2 e 3.
- e) errou a questão entre os passos 3 e 4.

10. Use as propriedades do logaritmo para simplificar a expressão

$$S = \frac{1}{2 \log_2 2016} + \frac{1}{5 \log_3 2016} + \frac{1}{10 \log_7 2016}$$

O valor de S é

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{5}$
- d) $\frac{1}{7}$
- e) $\frac{1}{10}$

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. A

$$\log 20 = \log 2 \cdot 10 = \log 2 + \log 10 = 0,3 + 1 = 1,3$$

2. B

$$\log 12 = \log 4 \cdot 3 = \log 4 + \log 3 = \log 2^2 + \log 3 = 2 \log 2 + \log 3 = 2 \cdot 0,3 + 0,48 = 1,08$$

3. C

$$\log_{2^3} x^3 = 3 \cdot \log_{2^3} x = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \log_2 x = \log_2 x$$

4.

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$$

Sabemos que $5 = \frac{10}{2}$, então,

$$\begin{aligned} \log 5 &= \log \left(\frac{10}{2} \right) = \log 10 - \log 2 \\ \frac{\log 5}{\log 2} &= \frac{\log 10 - \log 2}{\log 2} = \frac{1 - \log 2}{\log 2} \end{aligned}$$

5. A

$$\log_2 x + \log_2 y = 7 \rightarrow \log_2 x \cdot y = 7 \rightarrow 2^7 = x \cdot y \rightarrow x \cdot y = 128$$

Exercícios de vestibulares

1. B

Para resolver esta questão, precisamos relembrar de duas propriedades importantes do logaritmo, a propriedade da potência e da multiplicação.

Pelo enunciado, temos que determinar o valor de x que satisfaça a equação $10^x = N$

Se dado que $N = 2^{120} 3^{30}$, podemos igualar os N : $10^x = 2^{120} 3^{30}$

Aplicando o logaritmo de base 10 nos dois membros e aplicando as propriedades:

$$\begin{aligned} \log(10^x) &= \log(2^{120} 3^{30}) \\ x \cdot \log 10 &= \log 2^{120} + \log 3^{30} \\ x \cdot 1 &= 120 \cdot \log 2 + 30 \cdot \log 3 \\ x &= 120 \cdot 0,3 + 30 \cdot 0,47 \\ x &= 36 + 14,1 \\ x &= 50,1 \end{aligned}$$

Então o valor que mais se aproxima de N é 10^{50} .

2. D

Como $A = 160$ mm, substituímos ele na equação dada:

$$\begin{aligned} M &= \log 10A + 2,5 \\ M &= \log(10 \times 160) + 2,5 \\ m &= \log 10 + \log 160 + 2,5 \end{aligned}$$

Fatorando o 160, temos $160 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 10$. Assim:

$$\begin{aligned} M &= \log 10 + \log(24 \times 10) + 2,5 \\ M &= \log 10 + \log 24 + \log 10 + 2,5 \\ M &= \log 10 + 4 \cdot \log 2 + \log 10 + 2,5 \\ M &= 1 + 4 \cdot (0,3) + 1 + 2,5 \\ M &= 1 + 1,2 + 1 + 2,5 \\ M &= 5,7 \end{aligned}$$

Logo, a magnitude do local foi 5,7.

3. A

Temos que

$$f = \frac{A}{r^B}$$

Aplicando log, temos

$$\begin{aligned} \log f &= \log \frac{A}{r^B} \\ \log f &= \log A - \log r^B \\ \log f &= \log A - B \cdot \log r \end{aligned}$$

Como $\log f = Y$ e $\log r = X$, então,

$$Y = \log A - B \cdot X$$

4. C

Atualmente 400000 T

Queremos $100 \cdot 10^9$ T

$$T(a) = 400000 \cdot 2^a$$

$$10 \cdot 10^9 = 400000 \cdot 2^a$$

$$10^6 = 4 \cdot 2^a$$

$$10^6 = 2^{a+2}$$

$$\log 10^6 = \log 2^{a+2}$$

$$6 = (a + 2) (0,3)$$

$$6 = 0,3a + 0,6$$

$$a = 18$$

Ou seja, se dobramos 18 vezes, quer dizer que se passaram 36 anos. Então, $1986 + 36 = 2022$

5. E

$$\log_4 14 = \frac{\log_7 14}{\log_7 4} = \frac{\log_7 (2 \cdot 7)}{\log_7 2^2} = \frac{\log_7 2 + \log_7 7}{2 \cdot \log_7 2} = \frac{w + 1}{2w}$$

6. C

Considerando T_i o nível inicial de toxidez, conclui-se que $T_0 = 10 \cdot T_i$. Substituindo os valores na equação, temos:

$$\begin{cases} T_0 = 10 \cdot T_i \Rightarrow T_i = \frac{T_0}{10} \\ T(x) = T_0 \cdot (0,5)^{0,1x} \Rightarrow T_i = T_0 \cdot (0,5)^{0,1x} \Rightarrow \frac{T_0}{10} = T_0 \cdot (0,5)^{0,1x} \Rightarrow \frac{1}{10} = (0,5)^{0,1x} \Rightarrow 0,1x = \log_{0,5} \frac{1}{10} \Rightarrow \\ T(x) = T_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0,1x = \frac{\log \frac{1}{10}}{\log \frac{1}{2}} \Rightarrow 0,1x = \frac{\log 1 - \log 10}{\log 1 - \log 2} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{0 - 1}{0 - 0,3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{1}{0,3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{100}{3} \cong 33,3$$

O valor mínimo será 34, pois 33 dias não serão suficientes para retornar ao nível inicial.

7. C

Como cada filtro deixa passar $\frac{4}{5}$ da intensidade da luz que nele incide, usando n filtros, passará $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ da luz incidente.

O objetivo é reduzir essa intensidade a menos de 10% da original. Logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{5}\right)^n &< \frac{10}{100} \\ \left(\frac{8}{10}\right)^n &< \frac{1}{10} \\ \log \left(\frac{8}{10}\right)^n &< \log \frac{1}{10} \\ n(\log 8 - \log 10) &< \log 1 - \log 10 \\ n(3\log 2 - 1) &< 0 - 1 \\ n(-0,097) &< -1 \\ n &> \frac{1}{0,097} \\ n &> 10,3 \end{aligned}$$

Portanto, o menor valor de n é 11.

8. C

Temos

$$\frac{2}{3} \cdot \log \left(\frac{E_1}{E_0}\right) = 9 \rightarrow \log \left(\frac{E_1}{E_0}\right) = \frac{27}{2} \rightarrow \frac{E_1}{E_0} = 10^{\frac{27}{2}}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \log \left(\frac{E_2}{E_0}\right) = 7 \rightarrow \log \left(\frac{E_2}{E_0}\right) = \frac{21}{2} \rightarrow \frac{E_2}{E_0} = 10^{\frac{21}{2}}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{E_1}{E_0}}{\frac{E_2}{E_0}} &= 10^{\frac{27}{2} - \frac{21}{2}} \\ \frac{E_1}{E_2} &= 10^{\frac{6}{2}} = 10^3 \Leftrightarrow E_1 = 10^3 \cdot E_2 \end{aligned}$$

9. D

Ele errou entre os passos 2 e 3, pois ele não soube utilizar a propriedade de mudança de base de logaritmos. A propriedade nos diz que $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$, só que a questão nos diz que $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_c a - \log_c b$.

10. E

Lembrando que $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, $\log_b a^c = c \cdot \log_b a$ e $\log_c a \cdot b = \log_c a + \log_c b$, com a, b e c reais positivos diferentes de 1, temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2 \log_2 2016} + \frac{1}{5 \log_3 2016} + \frac{1}{10 \log_7 2016} \\ &= \frac{1}{10} (5 \cdot \log_{2016} 2 + 2 \cdot \log_{2016} 3 + \log_{2016} 7) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \log_{2016} 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \\ &= \frac{1}{10} \cdot \log_{2016} 2016 \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$